 معرفة :

كل جبر لي غير معتل بعد 2 قابل للحل $\{e_1,e_2\} \subset A$ $[e_1,e_2] \in A$

$\dot{e} = [e_1,e_2]$

$0 \neq e \in F$

الحالة الثانية :

إذا كان $[e_1,e_2] = c_1 e_1 + c_2 e_2$ حيث $c_1, c_2 \in F$ غير معدومين معاً

ننفذ المعادلات $\dot{e}_1, \dot{e}_2 \in A$ حيث

$\dot{e}_1 = c_1 e_1 + c_2 e_2$
$\dot{e}_2 = c_2 e_1 - c_1 e_2$ $\Big\}$

لنبرهن أن الجملة $\{\dot{e}_1, \dot{e}_2\}$ غير مرتبطة

ليكن $\lambda, \mu \in F$ بحيث

$\lambda \dot{e}_1 + \mu \dot{e}_2 = 0$

$\lambda c_1 e_1 + \lambda c_2 e_2 + \mu c_2 e_1 - \mu c_2 e_2 = 0$

$(\lambda c_1 + \mu c_2) e_1 + (\lambda c_2 - \mu c_2) e_2 = 0$

بما أن $\{e_1, e_2\}$ غير مرتبطة فإن

$\lambda c_1 + \mu c_2 = 0 \Rightarrow (\lambda + \mu) c_1 = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 0$
$\lambda c_2 - \mu c_2 = 0 \Rightarrow (\lambda - \mu) c_2 = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 0$

$\Rightarrow 2\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \mu = 0$

إذن الجملة $\{\dot{e}_1, \dot{e}_2\}$ مستقلة فهي تشكل أساساً لـ A على F

ليكن $[A,A] \ni z = [x,y]$ حيث $x, y \in A$

$x = \alpha \dot{e}_1 + \beta \dot{e}_2$ $\alpha, \beta \in F$
$y = \alpha_1 \dot{e}_1 + \beta_1 \dot{e}_2$ $\alpha_1, \beta_1 \in F$

ومنه فإن

$z = [x,y] = [\alpha \dot{e}_1 + \beta \dot{e}_2, \alpha_1 \dot{e}_1 + \beta_1 \dot{e}_2]$

$$\alpha\alpha_1 [e_1'/e_1'] + \alpha\beta_1 [e_1', e_2'] + \beta\alpha_1 [e_2', e_1'] + \beta\beta_1 [e_2', e_2']$$

$$= (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1) [e_1', e_2']$$

$$(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1) [c_1 e_1 + c_2 e_2, c_1 e_1 - c_2 e_2]$$

$$= \underbrace{\quad}_{\delta} \gamma [c_1^2 [e_1, e_1] - c_1 c_2 [e_1, e_2] + c_2 c_1 [e_2, e_1] - c_2^2 [e_2, e_2]]$$

$$= \underbrace{-2 \gamma c_1 c_2}_{\delta \, \in F} [e_1, e_2]$$

$$= \delta \underbrace{[e_1, e_2]}_{\in A} = \delta e$$

$$\Rightarrow \qquad \qquad DA = \{ \theta [e_1, e_2] ; \theta \in F \}$$

$$DA \ne 0 \Rightarrow A \in \mathfrak{g}\mathfrak{p} \Rightarrow DA \text{ is}$$

$$\text{so } Z_0 \in D^2 A = [DA, DA]$$

$$\therefore Z_0 = [x_0, y_0] \qquad \forall x_0, y_0 \in DA$$

$$x_0 = \alpha_0 e \quad\Big\} \qquad \forall \alpha_0, \beta_0 \in F$$
$$y_0 = \beta_0 e$$

$$Z_0 = [x_0, y_0] = [\alpha_0 e, \beta_0 e] = \alpha_0 \beta_0 [e, e] = 0$$

$$\Rightarrow D^2 A = 0 \quad A \text{ is}$$

$$[e_1, e_2, e_3] \qquad \quad A$$

$$[e_1, e_2] = a e_1$$
$$[e_1, e_3] = b e_+$$
$$[e_2, e_3] = c e_1 - f b e_2 + f a e_3$$
$$a, b, c, f \in F \setminus \{0\}$$

$$Z \in DA = [A, A]$$

$$x, y \in A \quad Z = [x, y]$$

$$x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \delta e_3$$
$$y = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \delta_1 e_3$$

$$Z = [x, y] = [\alpha e_1 + \beta e_2 + \delta e_3, \ \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \delta_1 e_3]$$
$$= \alpha \alpha_1 [e_1, e_1] + \alpha \beta_1 [e_1, e_2] + \alpha \delta_1 [e_1, e_3]$$
$$+ \beta \alpha_1 [e_2, e_1] + \beta_1 \beta [e_2, e_2] + \beta \delta_1 [e_2, e_3] + \delta \alpha_1 [e_3, e_1]$$
$$+ \delta \beta_1 [e_3, e_2] + \delta \delta_1 [e_3, e_3]$$

$$= (\alpha \beta_1 - \beta \alpha_1) [e_1, e_2] + (\alpha \delta_1 - \delta \alpha_1)[e_1, e_3] + (\beta \delta_1 - \delta \beta_1)[e_2, e_3]$$

$$= (\alpha \beta_1 - \beta \alpha_1) a e_1 + (\alpha \delta_1 - \delta \alpha_1) b e_1 + (\beta \delta_1 - \delta \beta_1)(c e_1 - \frac{f}{\delta} b e_2 + \frac{f}{\delta} a e_3)$$

$$= \left((\alpha \beta_1 - \beta \alpha_1) a + (\beta \delta_1 - \delta \beta_1) c \right) e_1$$

$$+ \left((\alpha \delta_1 - \delta \alpha_1) b - \underbrace{(\beta \delta_1 - \delta \beta_1) \frac{f}{\delta} b}_{} \right) e_2$$

$$+ \underbrace{(\beta \delta_1 - \delta \beta_1) \frac{f}{\delta} a}_{} e_3$$

$$\Rightarrow Z = \lambda e_1 - \delta b e_2 + \delta a e_3$$
$$= \lambda e_1 - \delta(a e_3 - b e_2) = \lambda e_1 - \delta e_0$$
$$\underbrace{\qquad}_{e_0}$$

$$Z \in D^2 A = [DA, DA] \qquad$$ يعني $[e_1, e_0]$ يجب أن يكون DA أي بمعنى

$$x_0, y_0 \in DA \text{ حيث } Z_0 = [x_0, y_0] \text{ أي نأخذ}$$

$$x_0 = c_1 e_1 + c_2 e_0 , \quad y_0 = d_1 e_1 + d_2 e_2 \qquad c_1, c_2, d_1, d_0 \in f$$

$$Z_0 = [x_0, y_0] = [c_1 e_1 + c_2 e_0, \ d_1 e_1 + d_2 e_0]$$
$$= c_1 d_1 [e_1, e_1] + c_1 d_2 [e_1, e_0] + c_2 d_1 [e_0, e_1]$$
$$+ c_2 d_2 [e_0, e_0]$$

$$= (c_1 d_2 - c_2 d_1) [e_1, e_2].$$

$$= (c_1 d_2 - c_2 d_1) [e_1, a e_2 - b e_1]$$

$$= (c_1 d_2 - c_2 d_1) (a [e_1, e_2] - b [e_1, e_1])$$

$$= (c_1 d_2 - c_2 d_1) (a b e_1 - b a e_1) = 0$$

ومنه نستنتج $D^2 A = 0$ بمعنى A جبر لي قابل للحل

عرض ثانية:

لو جبر جزئي قابل للحل من A أي قابل للحل

البرهان:

لنفترض A جبر لي قابل للحل من n نعلم أن $D^n A = 0$، لكن B جبر جزئي من A وعليه لكل $k \in N$ نثبت $D^k B \subseteq D^k A$ نبرهن بالاستقراء على

k

من أجل $k=0$ لدينا $D^0 A = B \subseteq A = D^0 A$

من أجل $k=1$ لدينا $D^1 B = [D^0 B, D^0 B] = [B, B] \subseteq [A, A] = DA$

نفترض صحة القضية عند رتبة t أي

$$D^t B \subseteq D^t A$$

نبرهن عند رتبة $t+1$

$$D^{t+1} B = [D^t B, D^t B] \subseteq [D^t A, D^t A] = D^{t+1} A$$

وعليه لكل $k \in N$ في

$$D^k B \subseteq D^k A$$

وبالتالي $D^n B \subseteq D^n A = 0 \implies D^n B = 0 \implies$

B قابل للحل

مبرهنة:

لتكن $A \longrightarrow A'$ تشاكل جبري لي عندئذ

① $P([A, A]) = [P(A), P(A)]$

② إذا كان A قابل للحل فإن $Im(f)$ قابل للحل

① نفرض $x \in f([A,A])$ عندئذ $x = f(y)$ حيث $y \in [A,A]$ ولكن

$y = [a,b]$ حيث $a,b \in A$ ، فإن

$x = f(y) = f([a,b]) = [f(a), f(b)] \in [f(A), f(A)]$

فإن

∴ $f([A,A]) \subseteq [f(A), f(A)]$

لكن $z \in [f(A), f(A)]$

$\Rightarrow z = [x_1, y_1]$; $x_1, y_1 \in f(A)$

$x_1 = f(a_1)$

$y_1 = f(b_1)$; $a_1, b_1 \in A$

$\Rightarrow z = [x_1, y_1] = [f(a_1), f(b_1)] = f[a_1, b_1] \subseteq f(A)$

ومنه نستنتج أن

$f([A,A]) = [f(A), f(A)]$

② لنفرض أن A جبر لي حيث $D^n A = \emptyset$ فإن لدينا لبرهان أن لأجل كل $m \in \mathbb{N}$ ، فإن

$D^m(f(A)) = f(D^m A)$ ⋆

بالتقاطر على m :

$m = 0 \Rightarrow D^0(f(A)) = f(A) = f(D^0 A)$

$m = 1$ $D(f(A)) = [f(A), f(A)] = f([A,A])$

$= f(DA)$

لنفرض أن العلاقة ⋆ محققة لأجل كل k أي أن

$D^k(f(A)) = f(D^k A)$

$D^{k+1}(f(A)) = [D^k(f(A)), D^k(f(A))] = [f(D^k A), f(D^k A)]$

$= f([D^k A, D^k A]) = f(D^{k+1} A)$

بعكس العلاقة ⋆ محققة لأجل كل $m \in \mathbb{N}$ بالتقاطر، وبذلك نثبت أن

$$D^n (f(A)) = f(D^n A) = f(0) = 0$$

<div dir="rtl">

وبالتالي ‏ $f(A) = I$ فإن ‏ $f(A) = f(t)$: بما أن ‏ ‏

تمرين

ليكن ‏ A ‏ و ‏ D ‏ حيث ‏ $R \in \mathbb{Z}$ ‏ و ‏ $m \in \mathbb{N}$ ‏ بين أنه

$$D(D^n A) = D^{n+1} A \qquad ①$$

② أثبت أن لكل ‏ $m \in \mathbb{N}$ ‏ يكون

$$D^m (D^n A) = D^{n+m} A$$

البرهان

n بالاستقراء على

$$n=0 \Rightarrow D(D^0 A) = D(A) = D^{0+1}(A)$$
$$n=1 \Rightarrow D(D A) = [DA, DA] = D^2 A = D^{1+1} A$$

k نفرض أنها صحيحة لأجل

$$D(D^k A) = D^{k+1}$$

$k+1$ ونثبت أنها صحيحة لأجل

$$D(D^{k+1} A) = [D^{k+1} A, D^{k+1} A]$$
$$= D^{k+2} A = D^{k+1+1} A$$

④ بالاستقراء على ‏ m

$$m=0 \Rightarrow D^0 (D^n A) = D^n A = D^{n+0} A$$
$$m=1 \Rightarrow D(D^n A) = D^{n+1} A$$

k نفرض أنها صحيحة لأجل

$$D^k (D^n A) = D^{n+k} A$$

$k+1$ ونثبت أنها صحيحة لأجل

$$D^{k+1}(D^n A) = [D^k(D^n A), D^k(DA)] = [D^{n+k} A, D^{n+k} A]$$

$$= D^{n+k+1} A$$

</div>

معطيات:

لتكن A جبر ليّ فوق الحلقة R و I مثالي في I الشرط الاساسي يتكون من:

① تابل لل

② كل من I و A/I تابل لل

البرهـ :

$\Leftarrow$ لنفرض أن A تابل لل فإن I كجزء جزئي من A و أيضاً I تابل لل

$\pi : A \longrightarrow A/I$

وكذلك $(\pi(x) = x + I)$ التابع π كذلك $I \subseteq A/I$ تابل لل

$\Leftarrow$ لنفرض كل من I و A/I تابل لل عندئذ يجد أعداد موجبة n, m

حيث $D^m I = 0$, $D^m(A/I) = I$

نفرض ان التابع التقويمي التام خاص $\pi : A \longrightarrow A/I$

$\pi(D^m A) = D^m(\pi(A)) = D^m(A+I) = I$

بالتعويض عندئذ $c \in t \in \mathbb{N}$

$D^t(A+I) = (D^t A) + I \longrightarrow A$

$t=0 \Rightarrow D^0(A+I) = A+I = (D^0 A)+I$

$t=1 \Rightarrow D(A+I) = [A+I, A+I] = [A,A]+I = (DA)+I$

لنفرض ان العلاقة $+$ صحيحة لأجل $k \in \mathbb{N}$

$D^{k+1}(A+I) = [D^k(A+I), D^k(A+I)]$

$= [(D^kA)+I, (D^kA)+I] = (D^{k+1}A)+I$

ومنه العلاقة $+$ صحيحة لأجل k

$$\bar{I} = D^n(A+\bar{I}) = (D^m A) + \bar{I}$$

<div dir="rtl">

بفرض $D^m A \supseteq \bar{I}$
</div>

$$0 = \bar{I} \supseteq D^m(D^m A) \supseteq D^n \bar{I} = 0$$
$$D^{n+m} A = 0$$

<div dir="rtl">

بفرض $A \supseteq$ نقاط ثابته حل

تشريح الاوائي ؟
</div>